Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Планарни графови

Ученик:
Никола Чутурић IVд

Ментор:
др Лука Милићевић

Београд, јун 2021.

Садржај

1

Увод

Планарни графови представљају значајну врсту графова, како због бројних објеката који се њима представљају, као што су различите мапе и мреже, тако и због многих својстава која они имају, што произилази само из тога да се могу нацртати у равни тако да им се гране не секу. Међутим, није увек лак задатак одредити да ли је граф планаран или не.

Један од најбољих потребних и довољних услова за планарност графа доказао је Куратовски. По његовој теореми која се може користити за проверу планарности, граф је планаран ако и само ако не садржи K_5 или $K_{3,3}$. Поред ове теореме, за проверу планарности се може користити и неки од алгоритама линеарне сложености.

Оцена хроматског броја графа је била отворен проблем више од једног века. У том периоду је било и доказа слабијих оцена, али и погрешних доказа, који су ипак водили ка коначном решењу. Тако је Теорема о четири боје постала прва теорема у математици доказана уз помоћ рачунара.

У овом раду дефинишемо појам планарног графа и показујемо основна својства планарних графова. Потом доказујемо теорему Куратовског и описујемо алгоритам за проверу планарности графова. На крају рада доказујемо Теорему о пет боја и наводимо поступак Апела и Хакена којим је доказана Теорема о четири боје.

2

Уводни појмови

У овом поглављу наводимо основне дефиниције и тврђења из теорије графова.

Дефиниција 2.1. *Граф* G је уређени пар (V, E) где је V скуп *чворова*, а E скуп *грана*, где важи $E \subseteq \big\{\{x, y\}|x, y \in V\big\}$. *Ред графа* G је $|G| = |V|$. *Величина графа* G је $e(G) = |E|$. У наставку ћемо грану $\{u, v\}$ означавати са uv.

Дефиниција 2.2. Граф је *прост* ако у њему не постоји више од једне гране између његових чворова и не постоје гране које повезују чвор са самим собом.

У наставку рада подразумевамо да су графови прости.

Дефиниција 2.3. *Комплетан граф* K_n је граф код којег је $|V| = n$ и $E = \{xy|x, y \in V, x \neq y\}$, односно постоји грана између свака два чвора.

Дефиниција 2.4. Чворови x и y су *суседни* ако постоји грана xy. *Суседство чвора* x је скуп $S(x) = \{y|xy \in E\}$. *Степен чвора* x је $d(x) = |S(x)|$.

На основу степена чворова у графу можемо лако израчунати број грана у графу.

Лема 2.1. Број грана у графу је $|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v)$.

Доказ. Директно из двоструког пребројавања (v, e), где је v чвор, а e грана. Међутим, ту се свака грана преброји два пута, те суму степена чворова треба поделити са 2. □

Дефиниција 2.5. Граф $H = (V_H, E_H)$ је *подграф графа* $G = (V, E)$ ако важи $V_H \subseteq V$ и $E_H \subseteq E$.

Дефиниција 2.6. *Пут* $x_1x_2\dots x_n$ је низ грана x_1x_2, x_2x_3, $\dots$, $x_{n-1}x_n$. Пут је *прост* ако се никоји чвор не појављује више од једном. Пут $x_1x_2\dots x_nx_1$ где је $x_2\dots x_n$ прост назива се *циклус*. У наставку ћемо пут $ux_1x_2\dots x_nv$ називати uv-пут.

Од значаја ће нам бити да у одређеним ситуацијама посматрамо најкраће путеве, или просте путеве, односно да избегавамо циклусе. Због тога је значајно следеће тврђење.

Лема 2.2. Ако у графу постоји uv-пут онда постоји и прост uv-пут.

Доказ. Посматрајмо најкраћи uv-пут $ux_1\dots x_nv$ и нека је $x_i = x_j, i \neq j$. Међутим, тада је и $ux_1\dots x_ix_{j+1}\dots x_nv$ uv-пут, и то краћи, што је контрадикција. □

Дефиниција 2.7. Граф је *повезан* ако постоји пут између свака два његова чвора.

Дефиниција 2.8. Грана је *мост* ако њеним уклањањем из графа он престаје да буде повезан.

Посматрајмо сада чворове x и y између којих постоји xy-пут. Јасно је да тада постоји и yx-пут. Такође, ако у разматрање унесемо и чвор z такав да постоји yz-пут, јасно је да постоји xz-пут $x\dots y\dots z$. Тако закључујемо да је релација која би показивала да ли постоји пут између нека два чвора заправо релација еквиваленције.

Дефиниција 2.9. Нека је $\sim$ релација дефинисана на графу G са $x \sim y$ ако и само ако постоји пут између x и y. Тада се класе еквиваленције релације $\sim$ називају *повезане компоненте графа G*.

Дефиниција 2.10. *Повезаност графа G* је најмањи број чворова потребан да се избаци из графа да он не би био повезан и означава се са $\kappa(G)$. Кажемо да је граф *k-повезан* ако је $k \leq \kappa(G)$.

Сада дефинишемо пар посебних врста графова које имају нека значајна својства – стабла и бипартитне графове.

Дефиниција 2.11. Граф је *стабло* ако је повезан и ацикличан.

Лема 2.3. Ако је G стабло реда $|G| = n$, тада је $e(G) = n - 1$.

Доказ. Индукцијом по n.
База: Нека је $n = 1$. Очигледно мора бити $e(G) = 0$.
Индуктивни корак: Нека је G стабло реда n и нека тврђење важи за мања

стабла. Нека је $uv \in E$ и нека је $H = G \setminus \{uv\}$. Како је грана uv јединствени uv-пут (да постоји још неки различит uv-пут, у графу би постојао циклус), закључујемо да H није повезан и да се састоји од две повезане компоненте H_1 и H_2 редова n_1 и n_2 ($n_1 + n_2 = n$) које су стабла. Применом индуктивне хипотезе имамо да је $e(G) = e(H_1) + e(H_2) + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$. $\square$

Дефиниција 2.12. *Независан скуп* је скуп чворова у графу између којих не постоје гране.

Дефиниција 2.13. *Бипартитни граф* је граф код којег је $V = A \cup B$, где су A и B дисјунктни независни скупови, а $E \subseteq \{ab | a \in A, b \in B\}$.

Дефиниција 2.14. Граф $K_{a,b}$ је бипартитни граф код кога је $|A| = a$, $|B| = b$ и $E = \{ab | a \in A, b \in B\}$, тј. постоји грана између сваког чвора из A и сваког чвора из B.

Дефиниција 2.15. *Деоба гране* представља замену једне гране простим путем дужине 2, односно додавањем чвора на средину гране. *Деоба графа* представља коначан број деоба грана.

3

Планарни графови

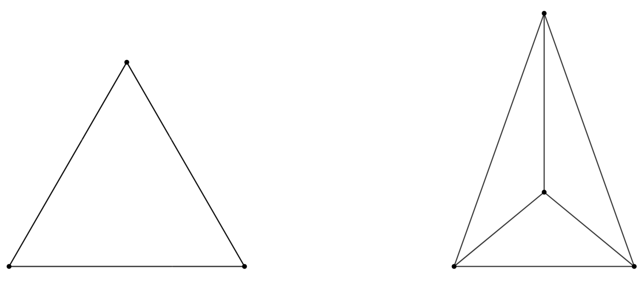
За примену графова веома је значајно њихово графичко приказивање. Тако уочавамо врсту графова који се могу нацртати у равни тако да им се гране међусобно не секу. На тај начин дефинишемо планарне графове.

Дефиниција 3.1. Цртање у равни такво да су чворови тачке, а гране изломљене линије и у коме нема пресецања назива се *планарно цртање*.

Дефиниција 3.2. Граф је *планаран* ако има планарно цртање.

Сада када смо увели појам планарних графова, корисно би било да знамо који графови јесу планарни, а који нису, као и која посебна својства имају планарни графови. Лако уочавамо пар очигледних примера планарних графова.

Пример 3.1. K_3 је планаран. K_4 је планаран.



Слика 3.1: K_3 и K_4 су планарни

Једна од најважнијих карактеристика планарних графова, а коју ћемо моћи да користимо и за проверу планарности графа у одређеним случајевима, представља следећа теорема.

Теорема 3.1. (Ојлерова карактеристика) Нека је G повезан планарни граф. Тада важи $V - E + F = 2$, где је V број чворова, E број грана, а F број области у његовом планарном цртању.

Доказ. Индукцијом по E.
База: За повезан граф са једном граном важи $V = 2$, $E = 1$ и $F = 1$, па је $V - E + F = 2$.
Индуктивни корак: Нека је G дати повезани граф и нека тврђење важи за графове мање величине. Уколико је дати граф стабло, имамо да важи $V - E = 1$ и $F = 1$, па тврђење важи. У супротном, посматрамо грану e која није мост и избришемо је из планарног цртања. Тиме добијамо граф H који има једну грану мање и једну област мање (како e није мост, са њених „страна” су различите области), на који сада примењујемо индуктивну хипотезу. $V_H - E_H + F_H = V - (E - 1) + (F - 1) = V - E + F = 2$. □

Применом Ојлерове карактеристике у појединим случајевима се лако може уочити да граф није планаран, као у следећим примерима.

Пример 3.2. K_5 није планаран.

Доказ. Претпоставимо супротно, да K_5 јесте планаран. Тада, како за K_5 важи $V = 5$ и $E = 10$, из Ојлерове карактеристике имамо $F = 7$. Међутим, из двоструког пребројавања парова (A, e), где је A област, а e грана, имамо да је $2E \geq 3F$, што произилази из чињенице да ниједна грана није мост, па на сваку грану „долазе” две области, а свака област је ограничена са најмање три гране, односно минимална дужина циклуса је 3, па добијамо да је $20 \geq 21$, што је контрадикција. □

Пример 3.3. $K_{3,3}$ није планаран.

Доказ. Претпоставимо супротно, да $K_{3,3}$ јесте планаран. Слично као и у Примеру 3.2, с тим што овде из двоструког пребројавања парова (A, e), где је A област, а e грана добијамо $2E \geq 4F$, јер је у бипартитном графу минимална дужина циклуса 4. Из Ојлерове карактеристике, како је $V = 6$ и $E = 9$, имамо да је $F = 5$, па добијамо да је $18 \geq 20$, што је контрадикција. □

Из Ојлерове карактеристике следе и додатна тврђења о планарним графовима, а која ће бити значајна за извођење додатних карактеристика. У доказима Примера 3.2. и 3.3. налазили смо оцене за број грана које су потом, комбиноване са Ојлеровом карактеристиком, водиле до контрадикције. Сада нас занима да ли можемо да дођемо до уопштене оцене за број грана у планарном графу. Следеће тврђење представља уопштење доказа Примера 3.2, да је K_5 непланаран.

Лема 3.1. У планарном графу важи $E \leq 3V - 6$.

Доказ. Двоструким пребројавањем парова (A, e), где је A област, а e грана добијамо да је за планарни граф са највећим могућим бројем грана $2E \geq 3F$. Ово следи из тога да је граф сигурно повезан и сигурно нема мостове, јер би тада било могуће додати још грана тако да граф остане повезан, док је најкраћи циклус дужине 3. Тада на основу Ојлерове карактеристике важи $F = 2 - V + E \leq \frac{2E}{3}$, па је $6 - 3V + 3E \leq 2E$, па добијамо да је $E \leq 3V - 6$. □

Директно из ове следи и наредна лема, која ће бити значајна за доказивање тврђења о бојењу планарних графова.

Лема 3.2. У планарном графу постоји најмање један чвор степена мањег од 6.

Доказ. Ако би сви чворови планарног графа били степена бар 6 тада би било $E \geq \frac{6V}{2} = 3V$, што је више од могућег по Леми 3.1. □

Од значаја ће бити и уочавање својстава подграфа како планарних тако и непланарних графова.

Дефиниција 3.3. *Минимални непланарни граф* је непланарни граф који нема ни један непланарни прави подграф, односно сви његови прави подграфи су планарни.

Лема 3.3. Сваки подграф планарног графа је планарни граф.

Доказ. Посматрајући планарно цртање произвољног планарног графа видимо да уколико обришемо ма које чворове и гране и даље имамо планарно цртање. □

Лема 3.4. Свака деоба непланарног графа је непланарна.

Доказ. Нека је G дати непланарни граф и нека је H нека његова деоба. Претпоставимо супротно, да је H планаран граф. Посматрајмо његово планарно цртање и уклонимо све чворове додате у деоби графа G. Тада добијамо планарно цртање графа G, па је и он планаран, што је контрадикција. □

4

Провера планарности графа

Једно од најзначајнијих питања о планарним графовима је било како утврдити да ли је граф планаран или није. До сада смо за утврђивање планарности графова користили Ојлерову карактеристику. Иако се за посебне случајеве из ње лако може закључити да граф није планаран за сложеније примере није од толике користи. Потребан и довољан услов за планарност графова дао је пољски математичар Казимјеж Куратовски 1930. године.

4.1 Теорема Куратовског

Дефиниција 4.1. Графови K_5, $K_{3,3}$ и њихове деобе називају се *графови Куратовског.*

У доказу ћемо посматрати минимални непланарни граф. Додавањем грана у њега он остаје непланаран, а такође ће и даље садржати подграфе Куратовског ако их је садржао и пре. Стога, претпоставићемо да постоји минимални непланарни граф који не садржи подграфе Куратовског. Из њега ћемо обрисати једну грану, чиме ћемо добити његов планарни подграф. Предстојеће леме ће нам дати својства овог подграфа из којих ћемо при покушају повратка гране у граф добити неки од подграфа Куратовкг.

Лема 4.1. Сваки минимални непланарни граф је 2-повезан.

Доказ. Докажимо прво да је сваки минимални непланарни граф G повезан. Претпоставимо супротно. Из минималности, имамо да су све његове повезане компоненте планарни графови, па имају и планарна цртања која заједно дају планарно цртање за G, па је и G планаран, што је контрадикција.
Претпоставимо сада да је $\kappa(G) = 1$. Тада постоји чвор v такав да $G \setminus \{v\}$ није

повезан. Посматрајмо сада његове повезане компоненте G_1, G_2, ..., G_n. Нека је $H_i = G_i \cup \{v\} \cup \{xv | x \in G_i, xv \in E(G)\}$. Због минималности G имамо да су H_i планарни, па имају планарна цртања, у пресеку којих се налази само чвор v. Спајањем ових планарних цртања добијамо планарно цртање за G, па је онда и G планаран, што је контрадикција. □

Лема 4.2. Нека је G непланарни 2-повезан граф који избацивањем чворова u и v постаје неповезан. Нека су G_1, G_2, ..., G_n повезане компоненте графа $G \setminus \{u, v\}$ и нека је $H_i = G_i \cup \{u, v\} \cup \{uv\} \cup \{xy | x \in \{u, v\}, y \in G_i, xy \in E(G)\}$. Тада је бар један H_i непланаран.

Доказ. Претпоставимо супротно, да су сви H_i планарни. Тада они имају планарна цртања, чијим спајањем и брисањем гране uv добијамо планарно цртање графа G, па закључујемо да је и он планаран, што је контрадикција. □

Лема 4.3. Нека је G повезан непланарни граф са минималним бројем грана који не садржи подграфе Куратовског. Тада је G 3-повезан.

Доказ. Како дати граф има минималан број грана, закључујемо да је он минимални непланарни граф. Претпоставимо да није 3-повезан. На основу Леме 4.1. имамо да је сигурно 2-повезан, односно да постоје чворови u и v такви да је $G \setminus \{u, v\}$ неповезан. Нека су $G_1, G_2, \ldots, G_n$ повезане компоненте графа $G \setminus \{u, v\}$ и нека је $H_i = G_i \cup \{u, v\} \cup \{uv\} \cup \{xy | x \in \{u, v\}, y \in G_i, xy \in E(G)\}$. На основу Леме 4.2. је бар један H_i непланаран, нека је то, без умањења општости, H_1. Имамо да је $e(H_1) < e(G)$, а како је G минимални непланарни граф који не садржи подграфе Куратовског, закључујемо да H_1 мора садржати неки подграф Куратовског K. На основу тога закључујемо да G не садржи грану uv, која је садржана у K. Посматрајмо сада граф $(H_1 \cup H_k) \setminus \{uv\}$ $(k \neq 1)$. Јасно је да је он подграф графа G. Како је $H_k \setminus \{uv\}$ повезан, у њему постоји прост uv-пут P. Сада имамо да је $G_1 \cup P$ подграф G и да садржи деобу графа K, што значи да G има подграф Куратовског, што је контрадикција. □

Сада нас занима шта се дешава ако из оваквог графа уклонимо једну грану. Циљ нам је да покажемо да се његова повезаност смањила највише за 1.

Лема 4.4. Грана e је мост ако и само ако није садржана ни у једном циклусу у графу G.

Доказ. $(\Rightarrow)$ Нека је $e = uv$ мост. Нека је $G' = G \setminus \{e\}$. Како је e мост, закључујемо да u и v нису повезани у G'. Ако би постојао циклус C у G који садржи e, тада би у G' постојао пут $C \setminus \{e\}$ који је uv-пут, што је контрадикција.
$(\Leftarrow)$ Нека $e = uv$ није садржана ни у једном циклусу у G. Претпоставимо супротно, да e није мост. Тада имамо да постоји uv-пут P у G'. Међутим, тада је $P \cup \{e\}$ циклус у G, што је контрадикција. □

Лема 4.5. (Витнијева теорема) Нека је G граф величине $|G| \geq 3$. G је 2-повезан ако и само ако између свака два чвора постоје најмање два дисјунктна пута.

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је G 2-повезан и нека је $d(u,v)$ најкраће растојање између чворова u и v. Доказујемо тврђење индукцијом по $d(u,v)$.
База: Нека је $d(u,v) = 1$. Како је G 2-повезан, закључујемо да uv није мост. Тада је, на основу Леме 4.4, uv садржана у неком циклусу, па закључујемо да постоје два дисјунктна пута између u и v.
Индуктивни корак: Нека је $d(u,v) = k$ и нека тврђење важи за мање $d(u,v)$. Нека је $u \dots xv$ uv-пут дужине k. На основу индуктивне хипотезе имамо да постоје два дисјунктна ux-пута P и Q. Како је G 2-повезан, имамо да постоји пут uv-пут R и када уклонимо чвор x из графа. Нека је y последњи чвор који се налази у пресеку путева P и R. Тада имамо следећа два дисјунктна uv-пута: први представљају пут P од u до y и пут R од y до v, а други представљају пут Q и грана xv.
($\Leftarrow$) Ако су свака два чвора повезана са најмање два дисјунктна пута онда је очигледно G повезан, а биће повезан и уколико уклонимо било који чвор, па закључујемо да је граф 2-повезан. □

Последица 4.1. Нека је G граф величине $|G| \geq 3$. G је 2-повезан ако и само ако свака два чвора припадају истом циклусу.

Лема 4.6. Нека је G 3-повезан граф. Ако је $uv \in E(G)$, онда је $G \setminus \{uv\}$ 2-повезан.

Доказ. На основу Последице 4.1. имамо да је ово тврђење еквивалентно са тим да свака два чвора x и y у графу $G \setminus \{uv\}$ припадају истом циклусу. Такође, како је G 3-повезан, закључујемо да је $|G| \geq 4$.
Први случај: Нека је, без умањења општости, $x = u$ и $y = v$. Посматрајмо још и чворове a и b. Како је G 3-повезан закључујемо да постоје путеви између свака два од ових чворова, јер ма која два да избацимо из графа он ће остати повезан, па постоји и циклус $u \dots a \dots v \dots b \dots u$.
Други случај: Нека је, без умањења општости $x = u$ и $y \neq u, v$. Посматрајмо још и чвор a. Слично као и у првом случају између свака два од ових чворова постоји пут, па имамо циклус $u \dots y \dots v \dots a \dots u$.
Трећи случај: Чворови x и y се разликују од u и v. Слично као и у прва два случаја између свака два чвора постоји пут, па имамо циклус $x \dots y \dots u \dots x$.
□

Дефиниција 4.2. Нека је H неки подграф графа G. Дефинишемо релацију $\sim$ тако да је $v_1 \sim v_2$ ако постоји $v_1 v_2$-пут у $G \setminus H$, где је дозвољено да неки (или оба) од чворова v_1 и v_2 припадају H. Подграфе графа G који представљају класе еквиваленције релације $\sim$ називамо *обилазнице подграфа* H.

У наставку ћемо посматрати само обилазнице циклуса, како ће нам њихова својства бити значајна за доказ теореме Куратовског.

Дефиниција 4.3. Обилазница циклуса је *унутрашња* ако се у цртању графа налази у унутрашњости круга који представља дати циклус. Обилазница циклуса је *спољашња* ако се у цртању графа налази у спољашњости датог циклуса.

Дефиниција 4.4. Две обилазнице циклуса $u_1u_2\dots u_kv_1v_2\dots v_l$ су *одвојене* ако су сви чворови у којима је једна повезана са циклусом неки од чворова u_i, док су сви чворови у којима је друга повезана са циклусом неки од чворова v_i. У супротном кажемо да се обилазнице *преклапају*.

Дефиниција 4.5. Обилазнице O_1 и O_2 су *наизменичне* ако за чворове u_1 и v_1 у којима је O_1 повезана са циклусом и чворове u_2 и v_2 у којима је O_2 повезана са циклусом важи да се на циклусу појављују у редоследу $u_1 - u_2 - v_1 - v_2$.

Лема 4.7. Ако се обилазнице преклапају, оне су или наизменичне или су повезане са циклусом у иста 3 чвора.

Доказ. Уочавамо да ако је једна од обилазница повезана са циклусом у 2 чвора оне морају бити наизменичне (иначе би биле једна обилазница). Такође уочавамо да ако су дате обилазнице повезане са циклусом у истим чворовима, оне су наизменичне ако је чворова у којима су повезане са циклусом више од 3.

Претпоставимо сада да обилазнице нису повезане са циклусом у истим чворовима. Тада је обилазница O_1 повезана са циклусом у чвору u_1 који се налази између чворова u_2 и v_2 у којима је обилазница O_2 повезана са циклусом. Међутим, како се обилазнице преклапају, закључујемо да O_1 мора бити повезана са циклусом и у чвору који се налази „са друге стране” чворова u_2 и v_2 у односу на чвор u_1, па закључујемо да су дате обилазнице наизменичне. □

Лема 4.8. Ако је обилазница O повезана са циклусом C у чворовима v_1, v_2 и v_3, тада постоји чвор $v_0 \in O \setminus C$, такав да се у пресеку v_iv_0-путева $(i = 1, 2, 3)$ налази само v_0.

Доказ. Нека је P v_1v_2-пут, нека је $v \in P,\ v \neq v_1, v_2$ и нека је Q v_3v-пут. Ако је v_0 први заједнички чвор путева P и Q, тада v_iv_0-путеви задовољавају тражене услове. □

Лема 4.9. У планарном графу унутрашње обилазнице су одвојене.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоје обилазнице O_1 и O_2 које се преклапају. Тада су оне по Леми 4.7. или наизменичне или су повезане са циклусом у иста 3 чвора.
Први случај: Нека су O_1 и O_2 наизменичне. Тада, по дефиницији, постоје чворови u_1 и v_1 у којима је O_1 повезана са циклусом и u_2 и v_2 у којима је O_2 повезана са циклусом такви да су у реду $u_1 - u_2 - v_1 - v_2$. У O_1 постоји u_1v_1-пут, а у O_2 постоји u_2v_2-пут и они су дисјунктни (иначе би биле једна обилазница). Међутим, у цртању мора да дође до пресека, па је то контрадикција.
Други случај: Нека су чворови у којима су O_1 и O_2 повезане са циклусом v_1, v_2 и v_3. Тада по Леми 4.8. постоји чвор $x \in O_1$ такав да се у пресеку xv_i-путева налази само x и чвор $y \in O_2$ такав да се у пресеку yv_i-путева налази само y. Сада имамо да xv_i-путеви деле унутрашњост циклуса на 3 области, од којих је у једној чвор y. С обзиром на то да се највише 2 од чворова v_i могу наћи на границама области у којој је y, имамо да би пут од y до преосталог v_i у цртању морао да сече неки од xv_i-путева, што је контрадикција. □

Лема 4.10. Унутрашња обилазница која је одвојена од свих спољашњих обилазница може се пребацити у спољашњост циклуса.

Доказ. Ако је унутрашња обилазница одвојена од свих спољашњих обилазница, онда се чворови у којима је повезана са циклусом налазе на ивицама једне заједничке области у коју се дата обилазница може пребацити. □

Лема 4.11. Ако је обилазница O повезана са циклусом C у чворовима u, v, x и y, тада постоје uv-пут P и xy-пут Q такви да им је једини пресек са циклусом $\{u, v, x, y\}$ и да садрже бар један заједнички чвор.

Доказ. По дефиницији је обилазница повезан подграф, чији су једини пресек са циклусом чворови у којима је повезана са циклусом, па имамо да постоје путеви између свака два чвора у њој. С друге стране, ако не би постојали тражени путеви са бар једним заједничким чвором, закључили бисмо да обилазница није повезана, што није могуће. □

Теорема 4.1. (Теорема Куратовског) Граф је планаран ако и само ако не садржи подграфе Куратовског.

Доказ. ($\Rightarrow$) На основу Леме 3.3. су сви подграфи планарног графа планарни, док су на основу Леме 3.4. сви графови Куратовског непланарни, јер су K_5 и $K_{3,3}$ непланарни, па закључујемо да планарни графови не могу садржати подграфе Куратовског.

($\Leftarrow$) Посматрајмо непланарни граф G са минималним бројем грана који не садржи подграфе Куратовског. Тај граф је очигледно минимални непланарни граф, а на основу Леме 4.3. је и 3-повезан. Нека је $uv \in E(G)$ и нека је $H =$

$G \setminus \{uv\}$. На основу Леме 4.6. имамо да је H 2-повезан, па на основу Последице 4.1. имамо да u и v припадају истом циклусу C у H. Узмимо за C највећи од свих циклуса у H којем припадају u и v.

Како је H 2-повезан, свака обилазница циклуса C у H мора бити повезана у најмање 2 чвора. Међутим, ако је спољашња обилазница повезана у 3 чвора, тада имамо већи циклус од C. Слично, ако је спољашња обилазница повезана у 2 чвора који су „са исте стране" чворова u и v у циклусу C, добили бисмо већи циклус од C. Тако закључујемо да све спољашње обилазнице морају бити повезане у 2 чвора која су „са различитих страна" чворова u и v. Такође, из чињенице да је G 3-повезан имамо да свака дата спољашња обилазница мора бити једна грана, јер би иначе избацивањем чворова у којима је повезана са циклусом G престао да буде повезан, па би, самим тим, био 2-повезан.

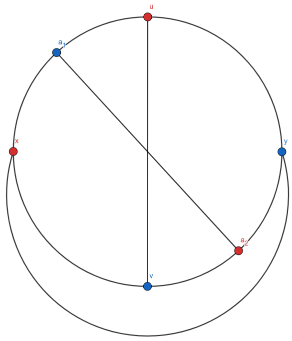
Како је H планаран, по Леми 4.9. имамо да су унутрашње обилазнице одвојене. Посматрајмо сада неку унутрашњу обилазницу која је наизменична са uv. Знамо да постоји најмање једна, јер би се иначе у планарно цртање графа H могла додати грана uv, чиме би се добило планарно цртање графа G, што би значило да је он планаран. Она се мора преклапати са најмање једном спољашњом обилазницом, јер би се иначе, по Леми 4.10, могла пребацити у спољашњост циклуса, чиме би се опет, додавањем гране uv добило планарно цртање за G. Тако закључујемо да постоји унутрашња обилазница O наизменична са uv и спољашњом обилазницом xy. Нека су a_1, a_2, $\ldots$, a_n чворови у којима је O повезана са C.

Лако је раздвојити два типски различита случаја, у једном су сви a_i из $\{u, v, x, y\}$, док у другом постоји и неки a_i који није у овом скупу. Прво разматрамо други од ових случаја.

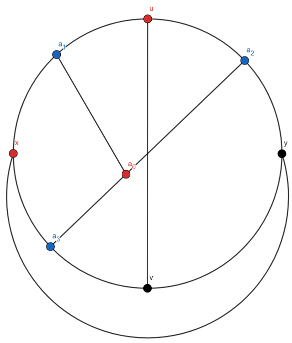
Први случај: a_1 је, без умањења општости, између u и x и a_2 је између v и y. Међутим, тада имамо деобу $K_{3,3}$ која се може свести на $K_{3,3}$ са деловима $\{u, x, a_2\}$ и $\{v, y, a_1\}$, као на Слици 4.1.

Други случај: a_1 је, без умањења општости, између u и x и никоји од a_i није између v и y. Како је O наизменична са uv, закључујемо да постоји a_2 између u и y, а како је наизменична са xy, постоји a_3 између x и v. Међутим, тада, по Леми 4.8, постоји чвор $a_0 \in O \setminus C$, такав да се у пресеку $a_i a_0$-путева $(i = 1, 2, 3)$ налази само a_0. Али тада имамо деобу $K_{3,3}$ која се може свести на $K_{3,3}$ са деловима $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{u, x, a_0\}$ (v настаје у деоби гране ua_3, а y у деоби гране xa_2), као на Слици 4.2.

Сада имамо да су сви a_i из $\{u, v, x, y\}$. Због тога што је O наизменична и са uv и са xy, имамо да O мора бити повезана са циклусом у сва 4 наведена чвора. На основу Леме 4.11. имамо да у унутрашњости циклуса постоје uv-пут P и



Слика 4.1: Слика уз први случај



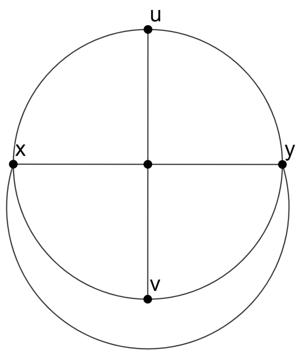
Слика 4.2: Слика уз други случај

xy-пут Q, који имају бар један заједнички чвор. Сада имамо два нова случаја:

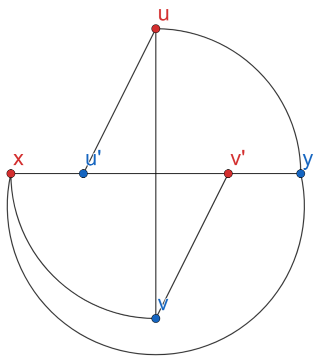
Трећи случај: Сви a_i су из $\{u, v, x, y\}$ и $|P \cap Q| = 1$. У овом случају имамо деобу K_5, као на Слици 4.3.

Четврти случај: Сви a_i су из $\{u, v, x, y\}$ и $|P \cap Q| > 1$. Изаберимо P и Q тако да сви њихови заједнички чворови представљају прост $u'v'$-пут. Тада имамо деобу $K_{3,3}$ која се може свести на $K_{3,3}$ са деловима $\{u, x, v'\}$ и $\{v, y, u'\}$, као на Слици 4.4.

У сваком од наведених случајева се добија неки подграф Куратовског, што је у контрадикцији са полазним тврђењем да постоји минималан непланарни граф који не садржи подграфе Куратовског, чиме је теорема доказана. □



Слика 4.3: Слика уз трећи случај



Слика 4.4: Слика уз четврти случај

4.2 Бојер-Мирволдов алгоритам

Поред теореме Куратовског, за проверу планарности графа може се користити и неки од алгоритама линеарне сложености. У наставку представљамо Бојер-Мирволдов алгоритам, који се заснива на додавању грана у графу.

Због Леме 3.1. можемо одмах утврдити да су сви графови за које је $E > 3V - 6$ непланарни. Алгоритам почиње претрагом у дубину (*Depth First Search, DFS*) од произвољног чвора. Ово стабло претраге памтимо и у наставку за индексе чворова користимо оне који су им додељени у претрази, где је корену стабла претраге додељен индекс 1. Даље ћемо у алгоритму додавати гране у граф по чворовима, и то оне које чвор повезују са његовим потомцима у стаблу претраге, полазећи од оних са највећим индексом ка корену стабла.

При додавању гране највише пажње се обраћа када се додаје грана која ће две 2-повезане компоненте досадашњег графа повезати у једну већу 2-повезану компоненту. При овој операцији се мора пазити да се чворови који ће у наставку алгоритма бити повезани са чвором из друге 2-повезане компоненте остану на ивици спољашње области. Овакви чворови се називају *спољно активни*. Ако је чвор w потомак чвора v, који је у 2-повезаној компоненти K, у стаблу претраге, кажемо да је *w спољно активан* ако постоји uw-пут, где је u предак v у стаблу претраге, који се састоји од једне гране која није у стаблу претраге и још евентуално грана из стабла претраге које повезују w са његовим потомцима који нису у K. За сваки чвор ћемо памтити индекс претка са најмањим индексом до којег постоји гореописани пут, а потом за сваки чвор памтити одговарајуће индексе за његову децу која се не налазе у истој 2-повезаној компоненти. Из листе чвора w бришемо његовог потомка када се споје две 2-повезане компоненте, од којих једна садржи тог потомка, где је пре спајања важило да брисањем чвора w тај подграф престаје да буде повезан. Такође, при обради чвора v, можемо да закључимо да је чвор w спољно активан ако постоји грана uw, где је $u < v$ или је први члан листе за чвор w мањи од v.

Током обраде чвора v прво додајемо гране које га повезују са његовом децом у стаблу претраге, а потом посматрамо гране изван стабла ка осталим његовим потомцима у стаблу претраге. Наивно, могли бисмо да посматрамо подстабло претраге чији је корен v, и да у њему идентификујемо које гране треба да додамо, међутим, ово решење је довољно само за квадратну сложеност. Зато је наш циљ да ефикасније пронађемо 2-повезане компоненте које ће бити спојене приликом додавања нових грана, у чему нам помаже процедура *Walkup*, а након тога треба пронаћи ефикасан начин за спајање тих 2-повезаних компоненти, што чини процедура *Walkdown*. Показује се да уколико процедура *Walkdown* не може да споји две 2-повезане компоненте, односно да дода грану у граф, онда тражени граф није планаран.

Walkup враћа корене, односно чворове чијим уклањањем тренутни граф престаје да буде повезан, 2-повезаних компоненти које учествују у додавању грана у граф. Прво се означе чворови који ће бити један од крајева нових грана (други је чвор v који се обрађује у главној процедури). Даље се за сваки од тих чворова обилази 2-повезана компонента по њеној ивици, док се не дође до корена, када се памти да та компонента припада одговарајућим, што се чува у листама сваког од корена, па се прелази на суседну, све док се не дође до чвора v који се обрађује, односно његове компоненте. Притом, при додавању компоненте на листу одговарајућих, компоненту ћемо додати на крај те листе уколико има спољно активан чвор. У супротном, компоненту додајемо на почетак листе. Овај распоред је значајан због ефикасности процедуре *Walkdown*.

Процедура *Walkdown* полази од чвора v који се тренутно обрађује по ивицама спољашњости тренутне 2-повезане компоненте, док не наиђе на њен корен, када се прелази у другу компоненту, кроз коју треба проћи или у којој је чвор који је други крај гране коју покушавамо да додамо. При томе памтимо редослед обиласка компоненти, као и смерове обиласка сваке од њих, јер, уколико се промени смер обиласка приликом обиласка, онда је потребно „окренути” компоненту код које је погрешан смер. Процедура се прекида уколико се врати у полазни чвор или уколико наиђе на спољно активан чвор који није одговарајући. Приликом преласка у другу компоненту, треба испоштовати два правила. Прво је да се, уколико је потребно, дода грана од v до тренутног чвора (корена компоненте), а да се потом, ако је могуће, прво пређе у компоненту у којој нема спољно активних чворова, односно, да се поштује редослед утврђен у процедури *Walkup*. Друго правило је да се приликом преласка у нову компоненту да предност смеру ка чвору који је одговарајући и није спољно активан, а потом одговарајућем чвору. Уколико такви не постоје, сигурно је да ће процедура наићи на спољно активан чвор који није одговарајући, што ће је прекинути. Уколико се овом процедуром не успе додати грана у граф, долазимо до закључка да је он непланаран.

5

Бојење графова

С обзиром на то да планарним графовима могу да се представе многи реални објекти, као што су рецимо мапе, где би свака земља била чвор, а између суседних земаља би постојале гране, било би корисно да знамо колико је боја потребно да га обојимо. При бојењу можемо да бирамо да ли ћемо да бојимо чворове или области графа, што се показује да је еквивалентно. При томе, задајемо услов да два суседна чвора (две суседне области) не смеју бити исте боје.

Дефиниција 5.1. Бојење графа је функција $b : V \to [n]$ таква да за свака два суседна чвора u и v важи $b(u) \neq b(v)$.

Мада сваки граф G можемо засигурно да обојимо у $|G|$ боја, поставља се питање који је најмањи број боја потребан за бојење планарног графа.

Дефиниција 5.2. Хроматски број графа $\chi(G)$ је најмањи број n такав да постоји бојење $b : V \to [n]$.

За доказивање теорема о горњим границама хроматског броја кључна је Лема 3.2, по којој у сваком планарном графу постоји чвор степена мањег од 6. Уз помоћ ове леме лако можемо индукцијом доказати да је сваком планарном графу хроматски број највише 6 – уклањањем чвора степена мањег од 6 испуњавају се услови за примену индуктивне хипотезе, а потом наведеном чвору доделимо боју различиту од оних које имају његови суседи (највише их је 5).

За побољшање ове оцене било би довољно да знамо да граф увек може да се обоји тако да бар два суседа чвора степена мањег од 6 имају исту боју. Наредну теорему је доказао Хивуд 1890. године.

Теорема 5.1. (Теорема о пет боја) Сваком планарном графу је хроматски број највише 5.

Доказ. Доказујемо индукцијом по $|G|$. Очигледно је да тврђење важи за све довољно мале планарне графове (важи за све са $|G| < 6$). Посматрајмо сада граф G и претпоставимо да тврђење важи за све мање графове.

На основу Леме 3.2. постоји чвор v у графу G степена мањег од 6. Нека је, без умањења општости, $d(v) = 5$ и нека су $v_1, v_2, \ldots, v_5$ суседи чвора v, и нека су распоређени тим редом у смеру казаљке на сату. Доделимо им, редом, боје 1, 2, 3, 4 и 5. Покушајмо сада да променимо боје чворова v_1 и v_3 тако да буду исте боје. На основу индуктивне хипотезе имамо да је хроматски број графа $G \setminus \{v\}$, без умањења општости, 5, односно сви чворови овог графа имају неку од боја 1, 2, 3, 4 и 5.

Ако променимо боју чвора v_1 у 3, онда морамо да променимо боје свих његових суседа у 1, боје свих њихових суседа у 3 и тако даље, све док не добијемо бојење по дефиницији (у ком случају је тврђење доказано) или док се не добије да боја неког од суседа чвора v_3 мора да буде промењена (из 1) у 3. У том случају закључујемо да постоји v_1v_3-пут P у којем се наизменично јављају боје 1 и 3. Овакав пут се назива *Кемпеов ланац*. Сличан аргумент важи и за чворове v_2 и v_4, односно или можемо да променимо боју чвора v_2 у 4 и тиме добијемо бојење графа $G \setminus \{v\}$ или постоји v_2v_4 Кемпеов ланац.

Међутим, како се чвор v_2 налази у унутрашњости циклуса vPv, а чвор v_4 у његовој спољашњости, закључујемо да се у цртању путеви P и Q морају сећи, а како је граф планаран, у њиховом пресеку се мора налазити чвор. Али тада би тај чвор морао истовремено бити и неке од боја 1 и 3, и неке од боја 2 и 4, што је немогуће. Стога закључујемо да је сигурно могуће „изједначити” боје неког од парова чворова (v_1, v_3) и (v_2, v_4), па се онда и чвору v може доделити боја тако да имамо бојење графа G. $\square$

Сада се поставља питање да ли се може дати и боља оцена од оне коју даје ова теорема. Очигледно је да би једино могуће побољшање било то да је хроматски број планарног графа највише 4, с обзиром на то да постоје планарни графови чији је хроматски број већи од 3, на пример K_4. Заправо, ова хипотеза је први пут постављена 1852. године. Један од најпознатијих „доказа” ове теореме дао је 1879. године Алфред Кемпе, међутим, испоставило се да није тачан. Упркос томе, испоставило се да је његов рад поставио основе за будући доказ ове теореме.

Кемпе је посматрао минимални планарни граф са хроматским бројем 5, односно, планарни граф такав да су хроматски бројеви планарних графова мањег реда мањи од 5, и желео је да покаже да је хроматски број таквог графа заправо највише 4.

Он је уочио да, ако посматрамо чвор v степена 3, и његове суседе u_1, u_2 и u_3, можемо да посматрамо граф у коме је чвор v „спојен” са неким од u_i, односно граф без v, у коме су сви u_i суседни. По претпоставци, хроматски број овог графа је мањи од 5, нека је, без умањења општости, 4. Тада се сваки од u_i може обојити у неку од три различите боје, па се и чвору v може доделити нека боја, различита од оних које имају u_i. Сличан доказ се користи и за чворове мањег степена.

Посматрајмо сада чвор степена 4. Слично као и пре, и њега можемо да изоставимо и да обојимо остатак графа у, без умањења општости, 4 боје. Посматрајмо сада суседе необојеног чвора, и то у паровима који се налазе „дијагонално" од необојеног чвора. Тада имамо, слично као у доказу Теореме о пет боја, да за оба посматрама пара важи или да се боја једног од чворова у пару може променити у боју другог, или да постоји Кемпеов ланац између посматраних чворова. Међутим, не може постојати Кемпеов ланац између оба пара чворова, јер би се онда у пресеку тих ланаца морао налазити чвор са две различите боје, што је немогуће. Стога је могуће променити боју једног од суседа необојеног чвора и доделити му боју тако да хроматски број графа буде 4.

Сличан аргумент Кемпе је користио и при доказу тврђења за чвор степена 5, међутим, Хивуд је 1890. уочио грешку у овом делу доказа, чиме је цео доказ оборен.

Значајна идеја за доказ овог тврђења је постојање *неизбежних конфигурација*, односно то да постоји скуп конфигурација које садрже чворове степена мањег од 6. Друга значајна идеја је *сводивост.* За конфигурацију кажемо да је сводива ако се њеним посматрањем може показати да је хроматски број графа мањи од 5. За доказ теореме довољно је показати да су све конфигурације из скупа неизбежних конфигурација сводиве.

У наставку се посвећујемо управо делу доказа који Кемпеу није био тачан, случају чвора степена 5. Другим речима, посматраћемо планарни граф такав да је минимални степен неког чвора 5, такав да је хроматски број графа мањег реда 4, и такав да су му све области, осим спољашње, троуглови. Желимо да применимо исти поступак као и за докизивање случаја чвора степена 4, односно да покажемо да се могу променити боје у графу без посматране конфигурације, тако да се и она може обојити у 4 боје, односно да је конфигурација сводива.

Посматрајмо неку конфигурацију C. Суседство C и гране унутар њега називамо *прстен* R конфигурације C. Гране које повезују C са R називамо *ноге* конфигурације C. Конфигурацију коју чине C, ноге C и R називамо *прстенаста конфигурација* $\bar{C}$, док *k-прстенастом конфигурацијом* називамо ону за коју је $|R| = k$. Чворови у прстену се нумеришу циклично.

Сада посматрамо сва бојења прстена у највише 4 боје. Два бојења су *еквивалентна* ако се једно може добити као пермутација бројева боја код другог. Скуп нееквивалентних бојења k-прстена означавамо са Φ_k. Може се показати да је $|\Phi_{14}| = 199291$. Сада нам је од значаја да у неко од датих бојења можемо да уклопимо и бојење C у највише 4 боје. Бојења R за која је ово могуће називамо *добра*, а њихов скуп означавамо са $\Phi_g(C)$.

Вођени Кемпеовим доказом дефинишемо *Кемпеове компоненте* за парове боја (a, b) и (c, d) као подграфе датог графа у коме су сви чворови неке од боја из једног од парова, а гране постоје само између чворова различитих боја. Другим речима, сваки пут у Кемпеовој компоненти је Кемпеов ланац.

Немачки математичар Хајнрих Хеш дао је велики допринос у теорији сводивости конфигурација. Увео је појмове *D-сводивости* и *C-сводивости*, а на основу његовог рада је његов ученик Карл Дире направио алгоритам који проверава да ли је конфигурација D-сводива.

D-сводивост дефинишемо на следећи начин: Посматрајмо сва бојења неке прстенасте кофигурације која нису добра. Посматрајмо Кемпеове компоненте за парове боја $(1, 2)$ и $(3, 4)$ прстена и покушајмо да заменимо боје у једном пару. Може се показати да постоје 42 случаја која описују односе Кемпеових компоненти прстена са Кемпеовим компонентама остатка графа, односно да ли неке од компоненти прстена припадају некој већој компоненти када се посматра цео граф. Уколико се неком од промена добија бојење еквивалентно неком добром бојењу, проглашавамо и посматрано за добро. У супротном, посматрамо Кемпеове компоненте и за преостале парове боја и понављамо исти поступак. Ако се испостави да су сва бојења прстенасте конфигурације добра, онда је конфигурација D-сводива.
Испоставља се ипак да конфугирација може бити сводива, иако није D-сводива. Биркхоф је приметио да је довољно да добра буду само она бојења која чине подскуп $\Phi'_n \subset \Phi_n$ таква да постоји бојење графа у коме је бојење прстена из Φ'_n. На тај начин се дефинише C-сводивост.

Поред наведених критеријума, Хеш је открио и критеријуме који показују да конфигурација није сводива. *Хешово правило* се дефинише на следећи начин:

- Ако је чвор v из конфигурације повезан са мање од $d(v) - 3$ чворова у конфигурацији, он се брише;

- Ако су два чвора u и v степена 5 из конфигурације у конфигурацији повезани међусобно и још само са једним истим чвором x, чворови u и v се бришу;

- Ако је чвор v из конфигурације, чијим брисањем конфигурација престаје да буде повезана, повезан са мање од $d(v) - 2$ чворова у конфигурацији, он се брише.

Овим поступком се добијаја једна или више мањих конфигурација. Уколико се понављајући ове поступке дође до празне конфигурације или конфигурације за коју се зна да није сводива, онда ни полазна конфигурација није сводива.

Поред овога, Апел и Хакен су приметили да не постоји пример конфигурације која није сводива код које важи $m > \frac{3n}{2} - 6$, где је m ред конфигурације, а n ред њеног прстена. Ова чињеница ће бити значајна при одређивању неизбежних конфигурација.

Како сада знамо како се проверава да ли је конфигурација сводива, треба још да откријемо које су све конфигурације неизбежне. За то се користи процедура названа *пражњење*. Основа ове процедуре је у Кемпеовом раду, где се добија да, када се сваком чвору v додели *наелектрисање* $6 - d(v)$, сума свих наелектрисања је 12, што се добија из Ојлерове карастеристике и двоструког пребројавања парова (A, e), где је A, област, а e грана, на основу кога се добија $3F = 2E$ ($V - E + F = 2$, $V - E + \frac{2}{3}E = 2$, $V - \frac{1}{3}E = 2$, $6V - \sum_{v \in V} d(v) = 12$). У наставку процедуре се наелектрисања прераспоређују по чворовима, међутим њихова сума треба да буде константна. Кенет Апел и Волфганг Хакен су унапредили процедуру пражњења управо како би доказали ову теорему.

Сваком чвору v је додељењо почетно наелектрисање $60(6 - d(v))$. Сума свих наелектрисања је, као што смо приметили, позитивна. У овој процедури, за сваку грану која повезује чвор v степена 5 са чвором u степена строго већег од 6 пребацујемо наелектрисање 30 са v на u. Може се приметити да ће ново наелектрисање чвора v бити позитивно само ако је испуњен неки од следећих услова:

1. $d(v) = 5$ и v у суседству има највише 1 чвор степена већег од 6;

2. $d(v) = 7$ и v у суседству има бар 3 чвора степена 5;

3. $d(v) = 8$ и v у суседству има бар 5 чворова степена 5;

4. $d(v) = 9$ и v у суседству има бар 7 чворова степена 5;

5. $d(v) = 10$ и v у суседству има бар 9 чворова степена 5;

6. $d(v) = 11$ и v у суседству има 11 чворова степена 5;

Како после сваке промене расподеле наелектрисања укупно наелектрисање остаје непромењено, односно позитивно, јасно је да је бар један од услова од 1 до 6 испуњен. Сада је циљ да за сваки од ових случајева нађемо скуп $\mathcal{U}$ који *покрива* неки од ових случајева, односно ако је један од услова испуњен, тада је бар једна конфигурација из $\mathcal{U}$ присутна. Очигледно је да су све такве конфигурације из $\mathcal{U}$ неизбежне. Међутим, оваква процедура не обезбеђује да су све конфигурације из $\mathcal{U}$ сводиве. Зато уводимо унапређења у посматрану процедуру. Једно од тих унапређења је да се појединим гранама промени количина наелектрисања која се њима преноси на, на пример, 20, 25 или 60 у неким случајевима. Ово отклања поједине несводиве конфигурације из скупа $\mathcal{U}$, међутим, додаје нове услове под којим наелектрисање чвора v може бити позитивно након прерасподеле, па се стога могу добити нове конфигурације у $\mathcal{U}$ које нису сводиве. Међутим, испоставље се да све те конфигурације садрже оне које су биле у $\mathcal{U}$ пре измене процедуре. Наставком увећања ових конфигурација расте вероватноћа да су оне сводиве.

На крају су Апел и Хакен њиховом сложеном процедуром пражњења добили скуп од 1476 неизбежних конфигурација. Уз помоћ Диреовог алгоритма и осталих радова Хеша и Биркхофа, успели су уз помоћ рачунара да покажу тврђење 1976. године, чиме је ово постала прва теорема у математици доказана уз помоћ рачунара.

6

Закључак

У првом делу рада смо дефинисали планарне графове и доказали најважнија њихова својства, као што су Ојлерова карактеристика, оцена броја грана и постојање чвора степена мањег од 6.

У другом делу рада је доказана теорема Куратовског методом која се нерeтко користи у теорији графова, уклањањем једне гране и покушајем враћања исте у граф, што се испостави немогућим. Описан је и алгоритам који одређује да ли је граф планаран у линеарној сложености, а који се поред тога може користити и за издвајање подграфа Куратовског из графа.

У трећем делу рада је на „традиционалан” начин доказана Теорема о пет боја, а такође је презентован и Кемпеов рад, на основу кога су Апел и Хакен доказали Теорему о четири боје.

Захваљујем се мом ментору Луки Милићевићу што ме је, пре свега, заинтересовао за теорију графова кроз његова предавања и што је био отворен за сваку врсту помоћи и сугестије при изради овог рада.

Литература

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, 1976.

[2] J. M. Boyer, W. J. Myrvold, *On the Cutting Edge: Simplified O(n) Planarity by Edge Addition*, 2004.

[3] K. I. Appel, W. I. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable*, 1989.